http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Nom : Khadijetou/Med Vadel
classe : 7C
N° : 1192

Exercice 4

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par: $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

On pose : $I = \int_0^1 \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $J = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Calculer f'(x); en déduire I et J.

Solution :

1) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

• l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

peut être sous la forme :

$$I = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

D'où $I = \left[\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2\right]_0^1$

$$I = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(1)$$

Enfin $\boxed{I = \sqrt{2}+1}$

• l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}dx$ peut être sous la forme :

$$J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}dx \qquad \text{D'où } J = \left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$$

$$J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1$$

Enfin $\boxed{J = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$

/1

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par: $f(x)=\int_{\cos x}^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$.

1) Montrer que f est une fonction affine.
2) Donner l'expression de f(x).

Solution :

f est definie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

par $f(x)=\int_{\cos x}^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$

pour Mq f est une fonctø affin on doit verifieque

$f'(x)=cte$

$\cdot\ f'(x)=\cos x\times\sqrt{1-\sin^2 x}+\sin\sqrt{1-\cos^2 x}$

$=\cos x.\cos x+\sin x.\sin x$

$=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$\Rightarrow f'(x)=cte$

donc $\boxed{f(x)=x+b}$

2) pour Calculer b on cherche l'image de 0 par la fonctø

$f(0)=\int_{\cos 0}^{\sin 0}\sqrt{1-t^2}\,dt$

$=\int_1^0\sqrt{1-t^2}\,dt=-\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$

$=-\left[\frac{2}{3}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\right]_0^1=-(-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}\Rightarrow b=\frac{2}{3}$

$f(x)=x+\frac{2}{3}$

(2)

Exercice 8

On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$;

1) Calculer I+J

2) En utilisant une intégration par parties, calculer I-J ,

3) En déduire I et J.

Solution :

1) $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin^2 x+x\cos^2 x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x+\cos^2 x)dx$

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$

$I+J=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I+J=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-0^2\right)$

$\boxed{I+J=\frac{\pi^2}{8}}$

2) On a : $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin^2 x-x\cos^2 x)dx$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x-\cos^2 x)\,dx$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x\cos 2x)dx$

On utilise une I.P.P :

On pose : $\begin{cases} u(x)=-x \\ v'(x)=\cos 2x \end{cases}$

alors : $\begin{cases} u'(x)=-1 \\ v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Comme : $\int uv'=uv-\int u'v$

$I-J=\left[-x\times\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$I-J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)\,dx$

$I-J=\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I-J=-\frac{1}{4}\cos\pi+\frac{1}{4}\cos 0$

$\boxed{I-J=\frac{1}{2}}$

On résoute le système : $\begin{cases} I+J=\frac{\pi^2}{8} \\ I-J=\frac{1}{2} \end{cases}$

• par additio :

$2I=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi^2+4}{16}$

• par soustraction :

$2J=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\Rightarrow J=\frac{\pi^2-4}{16}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par: $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{1+\tan^{2012}x}, & 0\leq x<\frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue, positive, décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrer que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a: $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$.

3) Interpréter le résultat précédent graphiquement. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{\pi}{4}$.

Solution

• $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim \frac{1}{1+\tan^{2012}x} = \frac{1}{1+(\pm\infty)^{2012}}$

$= \frac{1}{+\infty} = 0 = f(\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ f est continue en $\frac{\pi}{2}$

• $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

$0\leq \sin x\leq 1$
$0\leq \cos x\leq 1$ $\Rightarrow \tan x\geq 0$

$\Rightarrow \tan^{2012}x\geq 0 \Rightarrow 1+\tan^{2012}x\geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{1+\tan^{2012}x}\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq 0$

• $f'(x) = -\frac{(1+\tan^{2012}x)'}{(1+\tan^{2012}x)^2}$

$= \frac{-(2012\tan^{2011}x(1+\tan^2x))}{(1+\tan^{2012}x)^2}$

$= \frac{-2012\tan^{2011}x - 2012\tan^{2013}x}{(1+\tan^{2012}x)^2}\leq 0$

$\Rightarrow$ f est strictement $\searrow$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

2) $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$?

$f(\frac{\pi}{2}-x) = \frac{1}{1+\tan^{2012}(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{1}{1+\cot^{2012}x}$

$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x) = \frac{1}{1+\cot^{2012}x}+\frac{1}{1+\tan^{2012}x}$

$= \frac{1+\tan^{2012}x+1+\cot^{2012}x}{(1+\cot^{2012}x)(1+\tan^{2012}x)}$

or: $1+\tan^{2012}x = \frac{1}{\cos^{2012}x}$

$1+\cot^{2012}x = \frac{1}{\sin^{2012}x}$

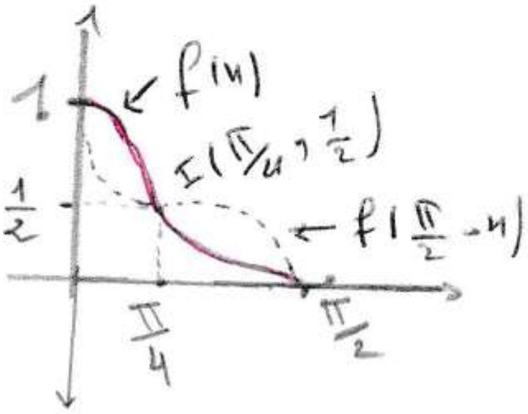
$\Rightarrow f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x) = \frac{\frac{\sin^{2012}x+\cos^{2012}x}{\cos^{2012}x\cdot\sin^{2012}x}}{\frac{1}{\cos^{2012}x\cdot\sin^{2012}x}}$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x) = \sin^{2012}x+\cos^{2012}x = 1$

donc:

$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$

le point $I(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2})$ est un centre de symetrie de C_f.



On a :

$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)\,dx=[x]_0^{\pi/2}$

$\int_0^{\pi/2} f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}$

or :

$I(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ C.S de C_f

donc :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$

Exercice 6

Pour tout entier naturel n on pose: $U_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$

1) Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n).
2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente.
3) Montrer que: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

Solution

la fonction $t \to \frac{t^n}{1+t^2}$ est rationnelle et continue sur $[0,1]$ pour tout n d'où l'écriture définir bien une (S) numerique.

2) $0 \leq t \leq 1$

$0 \leq t^{n+1} \leq t^n$

$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}$

$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

$0 \leq U_{n+1} \leq U_n$ alors

U_n est positive donc minorer par zero et decroissant Donc U_n est convergente.

3) $0 \leq t^2 \leq 1$

$1 \leq 1+t^2 \leq 2$

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

$\frac{1}{2} t^n \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$

$\int_0^1 \frac{1}{2} t^n dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^n dt$

$\left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1$

$\frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

d'apres théorme de gendare

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$